

Обобщенно вычислимые нумерации и неподвижные точки

М. Х. Файзрахманов¹

Аннотация. В статье доказывается, что для любого в.п. множества W его невычислимость равносильна выполнению теоремы рекурсии (с параметрами) в каждой универсальной W -вычислимой нумерации, а также ее слабой предполноте и неразложимости. Устанавливается, что тьюринговая полнота в.п. оракула W равносильна наличию предполной W -вычислимой нумерации у любого W -вычислимого семейства.

Ключевые слова: нумерация, универсальная нумерация, предполная нумерация, слабо предполная нумерация, теорема рекурсии.

1. Введение

Начиная со второй половины 90-х годов прошлого столетия после публикации работы С. С. Гончарова и А. Сорби [1], излагающей общую концепцию вычислимых семейств конструктивных объектов, наряду с вычислимыми нумерациями стали исследоваться и разного рода обобщенно вычислимые нумерации. Наибольший прогресс при этом был достигнут в изучении вычислимых нумераций в арифметической [2–5] и гиперарифметической [6, 7] иерархиях. К середине 2010-х годов обобщенно вычислимые нумерации стали интенсивно исследоваться и с позиции равномерной перечислимости семейств относительно произвольного оракула A . Такие нумерации, впервые содержательно изученные в работе С. А. Бадаева и С. С. Гончарова [8] (см. также [9, 10]), были названы A -вычислимыми. В настоящей статье исследуются A -вычислимые нумерации для вычислимо перечислимых (в.п.) оракулов A и оракулов, вычисляющих невычислимые в.п. множества. Рассмотрение такого класса оракулов охватывает и нумерации, вычислимые в (гипер)арифметической иерархии.

В первой части статьи мы рассматриваем некоторые вопросы, касающиеся универсальных нумераций. Интерес к изучению таких нумераций [8, 11, 12] связан с тем, что они содержат в себе информацию обо всех (обобщенно) вычислимых нумерациях нумеруемого семейства. Основная ее цель заключается в определении форм теоремы о неподвижной точке, справедливых в универсальных обобщенно вычислимых нумерациях. Во второй

¹Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 22-21-20024) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

части статьи классифицируются в.п. оракулы W , для которых любое W -вычислимое семейство обладает (слабо) предполной W -вычислимой нумерацией. Такие нумерации определяются выполнением в них теорем о неподвижной точке с разной степенью равномерности и составляют важный раздел теории нумераций, имеющий множество приложений в различных разделах теории вычислимости [13–18].

Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю. Л. Ершова [19] и в его статье [20]. Напомним самые необходимые из них. *Нумерацией* счетного множества S называется произвольное сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow S$. Говорим, что нумерация α *сводится* к нумерации β (обозначаем как $\alpha \leq \beta$), если $\alpha = \beta \circ f$ для некоторой вычислимой функции f . Нумерации α и β называются *эквивалентными* (в этом случае используется обозначение $\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$. Для двух нумераций α_0 и α_1 их *прямая сумма* есть нумерация $(\alpha_0 \oplus \alpha_1)(2x+i) = \alpha_i(x)$, $i = 0, 1$. *Нумерационная эквивалентность* нумерации α определяется как

$$\eta_\alpha = \{\langle x, y \rangle : \alpha(x) = \alpha(y)\}.$$

В настоящей статье рассматриваются только нумерации семейства подмножеств \mathbb{N} .

Приведём теперь необходимые сведения, связанные с вычислимостью нумераций. Пусть A — произвольное множество натуральных чисел, а \mathcal{S} — семейство A -в.п. множеств. Следуя [1, 8], назовём нумерацию α семейства \mathcal{S} *A -вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{\langle x, y \rangle : x \in \mathbb{N}, y \in \alpha(x)\}$$

A -в.п. Семейство \mathcal{S} называется *A -вычислимым*, если оно имеет A -вычислимую нумерацию. Опуская оракул A , получим определения *вычислимой* нумерации и *вычислимого* семейства.

Мы используем стандартные обозначения из теории вычислимости. Через φ_e и W_e обозначаем соответственно частично вычислимую функцию и в.п. множество с геделевским номером e . Область определения произвольной частичной функции ψ будем обозначать как $\text{dom } \psi$, а ее область значений — как $\text{rng } \psi$. Пишем $\psi(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom } \psi$, и $\psi(x) \uparrow$ — в противном случае. Вычислимую функцию $\langle x, y \rangle \mapsto 2^x(2y+1)-1$, взаимно однозначно нумерующую пары натуральных чисел, обозначаем через $c(x, y)$, а проекции ее образа на первую и вторую координаты — через l и r соответственно: $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$. Будем писать $c(x, y, z)$ вместо $c(x, c(y, z))$. Остальные обозначения можно найти в монографии Р.И. Соара [21].

2. Универсальные нумерации

Напомним, что отношение эквивалентности η на \mathbb{N} называется *слабо предполным*, если существует частично вычислимая функция ψ такая, что для любого геделевского номера e всюду определенной функции φ_e выполняется

$$\psi(e) \downarrow \ \& \ \langle \psi(e), \varphi_e(\psi(e)) \rangle \in \eta.$$

Назовем нумерацию ν *слабо предполной*, если ее нумерационная эквивалентность η_ν является слабо предполной. Приведем достаточное условие на множество A , обеспечивающее слабую предполноту каждой универсальной A -вычислимой нумерации.

Теорема 1. Пусть $\emptyset <_T B \leq_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда любая универсальная A -вычислимая нумерация ν является слабо предполной.

Доказательство. Сначала определим B -вычислимую функцию g следующим образом:

$$g(c(i, e, u)) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_e(c(i, e, u))), & \text{если } \exists s [u \leq s \ \& \ \varphi_{e,s}(c(i, e, u)) \downarrow \ \& \\ & \ \& \ \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i, e, u))) \downarrow \ \& \\ & \ \& \ B_{s+1} \upharpoonright u \neq B_s \upharpoonright u], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы вычислить с оракулом B значение $g(c(i, e, u))$, достаточно выбрать такое наименьшее $t = t(u) \geq u$, что

$$B_{t+1} \upharpoonright u = B \upharpoonright u.$$

Тогда

$$g(c(i, e, u)) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_e(c(i, e, u))), & \text{если } \exists s \leq t(u) [u \leq s \ \& \ \varphi_{e,s}(c(i, e, u)) \downarrow \ \& \\ & \ \& \ \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i, e, u))) \downarrow \ \& \\ & \ \& \ B_{s+1} \upharpoonright u \neq B_s \upharpoonright u], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку нумерация ν универсальна, выполняется $\nu \circ g \leq \nu$. Следовательно, существует такое e , что функция φ_e всюду определена и

$$\nu \circ g = \nu \circ \varphi_e.$$

Теперь определим частично вычислимую функцию ψ , свидетельствующую о слабой предполноте ν . Для этого определим частично вычислимую функцию σ , положив значение $\sigma(i)$ равным наименьшему s , удовлетворяющему для некоторого $u \leq s$ условию

$$\varphi_{e,s}(c(i, e, u)) \downarrow \ \& \ \varphi_{i,s}(\varphi_{e,s}(c(i, e, u))) \downarrow \ \& \ B_{s+1} \upharpoonright u \neq B_s \upharpoonright u, \quad (1)$$

если такое s существует, и положив $\sigma(i) \uparrow$ в противном случае. Покажем, используя метод разрешения, что если функция φ_i всюду определена, то значение $\sigma(i)$ определено. Предположим, что, напротив, выполняется

$$\varphi_{e,t}(c(i, e, u)) \downarrow \ \& \ \varphi_{i,t}(\varphi_{e,t}(c(i, e, u))) \downarrow \Rightarrow B_{t+1} \upharpoonright u = B_t \upharpoonright u$$

для всех t и всех $u \leq t$. Тогда

$$\varphi_{e,t}(c(i, e, u)) \ \& \ \varphi_{i,t}(\varphi_{e,t}(c(i, e, u))) \downarrow \Rightarrow B \upharpoonright u = B_{t+1} \upharpoonright u$$

для всех t и всех $u \leq t$. Отсюда, B вычислимо. Таким образом, получили противоречие с выбором B . Теперь положим $\psi(i) \uparrow$, если $\sigma(i) \uparrow$, и

$$\psi(i) = \varphi_{e, \sigma(i)}(c(i, e, u)),$$

если $\sigma(i) \downarrow$, где $u \leq \sigma(i)$ — наименьшее число, удовлетворяющее (1) при $s = \sigma(i)$. Пусть φ_i всюду определена. Покажем, что тогда $\psi(i)$ является неподвижной точкой функции φ_i в нумерации ν . В самом деле, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \nu(\psi(i)) &= \nu(\varphi_e(c(i, e, u))) = \nu(g(c(i, e, u))) = \\ &= \nu(\varphi_i(\varphi_e(c(i, e, u)))) = \nu(\varphi_i(\psi(i))). \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство теоремы. \square

Покажем, что для в.п. множества W слабая предполнота каждой универсальной W -вычислимой нумерации равносильна выполнению в ней теоремы рекурсии (с параметрами).

Теорема 2. *Для в.п. множества W следующие условия эквивалентны:*

1. W невычислимо;
2. любая универсальная W -вычислимая нумерация слабо предполна;
3. для любой универсальной W -вычислимой нумерации ν и любой двухместной вычислимой функции f существует такая вычислимая функция h , что $\nu(h(x)) = \nu(f(x, h(x)))$ для всех x ;
4. для любой универсальной W -вычислимой нумерации ν и любой вычислимой функции g существует такое число n , что $\nu(n) = \nu(g(n))$;

Доказательство. Импликация $(1 \Rightarrow 2)$ следует из Теоремы 1. Чтобы установить справедливость импликации $(2 \Rightarrow 3)$, покажем, что каждая двухместная вычислимая функция f удовлетворяет теореме рекурсии с параметрами в любой слабо предполной нумерации ν . Зафиксируем частично вычислимую функцию ψ такую, что

$$\psi(e) \downarrow \ \& \ \nu(\psi(e)) = \nu(\varphi_e(\psi(e)))$$

для любого геделевского номера e всюду определенной функции φ_e . Определим вычислимые функции g и h , положив

$$\begin{aligned} \varphi_{g(x)}(y) &= f(x, y), \\ h(x) &= \psi(g(x)). \end{aligned}$$

Тогда для всех x выполняется

$$\nu(f(x, h(x))) = \nu(\varphi_{g(x)}(h(x))) = \nu(\varphi_{g(x)}(\psi(g(x)))) = \nu(\psi(g(x))) = \nu(h(x))$$

Импликация $(3 \Rightarrow 4)$ очевидна. Импликация $(4 \Rightarrow 1)$ следует из [22, Теорема 2.1]. \square

Напомним введенное Ю.Л. Ершовым [13] понятие *предполной* нумерации.

Определение 3. Нумерация α называется *предполной*, если для любой частично вычислимой функции ψ существует такая вычислимая функция f , что $\alpha(\psi(x)) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \text{dom } \psi$.

Предполные нумерации могут быть следующим образом охарактеризованы в терминах неподвижных точек.

Теорема 4 (Ю.Л. Ершов [19]). *Нумерация α является предполной тогда и только тогда, когда для каждой двухместной частично вычислимой функции ψ существует такая вычислимая функция h , что $\alpha(\psi(x, h(x))) = \alpha(h(x))$ для всех x , удовлетворяющих условию $\langle x, h(x) \rangle \in \text{dom } \psi$.*

В [23] было установлено, что если множество A является *высоким* ($\emptyset'' \leq_T A'$), то каждая универсальная A -вычислимая нумерация предполна. Таким образом, остается нерешенным

Вопрос 5. Каково описание (в.п.) множеств A , для которых любая универсальная A -вычислимая нумерация предполна?

Согласно классическому результату Ю.Л. Ершова [13] никакая предполная нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого семейства. Покажем, что для в.п. множества W неразложимость любой универсальной W -вычислимой нумерации равносильна его невычислимости.

Теорема 6. *Пусть $\emptyset <_T B \leq_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда для любой универсальной A -вычислимой нумерации ν и любых нумераций ν_0, ν_1 из $\nu \equiv \nu_0 \oplus \nu_1$ следует, что либо $\nu \equiv \nu_0$, либо $\nu \equiv \nu_1$.*

Доказательство. Определим A -вычислимую нумерацию α такую, что если она сводима к прямой сумме $\nu_0 \oplus \nu_1$ посредством функции φ_e , для одного из $i = 0, 1$ найдется вычислимая последовательность $\{x_j^i\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которой

$$\nu(j) = \alpha(c(e, x_j^i)) = \nu_i \left(\frac{\varphi_e(c(e, x_j^i)) - i}{2} \right) \quad (2)$$

при любом $j \in \mathbb{N}$. Отсюда получим $\nu \leq \nu_i$.

Зафиксируем произвольно e и для всех x определим значение $\alpha(c(e, x))$. Для этого следующим образом определим в.п. множества M_0 и M_1 :

$$M_i = \{x : \exists s \exists z [\varphi_{e,s}(c(e, x)) = 2z + i \ \& \ B_s \upharpoonright x \neq B_{s+1} \upharpoonright x]\}.$$

Пусть

$$x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots$$

вычислимое (возможно конечное) перечисление M_i без повторений. Для произвольного x выберем наименьшее t такое, что

$$B_{t+1} \upharpoonright x = B \upharpoonright x.$$

Если существует $s \leq t$, удовлетворяющее условию

$$\varphi_{e,s}(c(e, x)) \downarrow \ \& \ B_s \upharpoonright x \neq B_{s+1} \upharpoonright x, \quad (3)$$

то $x \in M_0 \cup M_1$. Выберем единственные $i = 0, 1$, и j , для которых $x = x_j^i$, и определим

$$\alpha(c(e, x)) = \nu(j).$$

Если $s \leq t$, удовлетворяющего (3) не существует, то полагаем

$$\alpha(c(e, x)) = \nu(0).$$

Выберем e , для которого функция φ_e всюду определена и

$$\alpha = (\nu_0 \oplus \nu_1) \circ \varphi_e.$$

Поскольку B невычислимо, существует бесконечно много пар $\langle s, x \rangle$, удовлетворяющих (3). Следовательно, $M_0 \cup M_1$ бесконечно. Отсюда, для одного из $i = 0, 1$, при любом j справедливо условие (2). Таким образом, выполняется сводимость $\nu \leq \nu_i$. \square

Следствие 7. Для в.п. множества W следующие условия эквивалентны:

1. W невычислимо;
2. никакая универсальная W -вычислимая нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого ей семейства.

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство, состоящее из двух несравнимых по включению в.п. множеств, обладает универсальной вычислимой нумерацией [19], которая разлагается в нетривиальную сумму нумераций одноэлементных подсемейств. \square

3. Семейства с предполными и слабо предполными нумерациями

В настоящем разделе рассматривается вопрос из работы Барендрегта и Тервейна [16] о существовании нумераций, удовлетворяющих теореме рекурсии с параметрами (для всюду определенных двухместных функций), но не являющимися предполными. Ответ на него получается из результатов работ [17, 18], в которых построены (причем во второй работе бесконечно много попарно не сравнимых) слабо предполные позитивные эквивалентности, не являющиеся предполными. Следующие результаты показывают, что существуют семейства, обладающие слабо предполными, но не обладающие предполными обобщенно вычислимыми нумерациями.

Теорема 8. Для в.п. множества W следующие условия эквивалентны:

1. $\emptyset' \leq_T W$;

2. любое W -вычислимое семейство обладает предполной W -вычислимой нумерацией.

Доказательство. Чтобы установить импликацию $(1 \Rightarrow 2)$, выберем произвольное W -вычислимое семейство \mathcal{S} и для любой его W -вычислимой нумерации и элемента $X \in \mathcal{S}$ определим пополнение α относительно X [13]:

$$\alpha_X(c(e, x)) = \begin{cases} \alpha(\varphi_e(x)), & \text{если } \varphi_e(x) \downarrow, \\ X, & \text{если } \varphi_e(x) \uparrow. \end{cases}$$

Нумерация α_X полна относительно X и, тем более, предполна. Поскольку $\emptyset' \leq_T W$, нумерация α_X является W -вычислимой.

Докажем импликацию $(2 \Rightarrow 1)$. Пусть $W <_T \emptyset'$. Выберем произвольное непустое конечное семейство W -в.п. множеств \mathcal{R} , не содержащее наименьшего по включению элемента. Пусть α — произвольная W -вычислимая нумерация семейства \mathcal{R} . Обозначим через X_0, \dots, X_n ($n > 0$) все минимальные по включению элементы \mathcal{R} . Так же как в доказательстве [19, I §2, Предложение 4] выберем такие конечные множества F_0, \dots, F_n , что

$$F_i \subseteq X_j \Leftrightarrow i = j$$

для всех $i, j \leq n$. Зафиксируем номера x_0, x_1 , для которых $\alpha(x_0) = X_0$ и $\alpha(x_1) = X_1$.

Допустим, что α предполна. Тогда существует двухместная вычислимая функция f такая, что $\alpha(f(e, x)) = \alpha(\varphi_e(x))$ для всех e и всех $x \in \text{dom } \varphi_e(x)$. Пусть $\{\alpha_s(x)\}_{s, x \in \mathbb{N}}$ — сильно W -вычислимая двойная последовательность конечных множеств, для которой $\alpha(x) = \bigcup_s \alpha_s(x)$ и $\alpha_t(x) \subseteq \alpha_{t+1}(x)$ для всех x, t . Определим W -вычислимые функции r и h , положив

$$r(y) = \min\{s : \exists i \leq n [F_i \subseteq \alpha_s(y)]\},$$

$$h(y) = \min\{i \leq n : F_i \subseteq \alpha_{r(y)}(y)\}$$

для всех y . По лемме о модуле (см. [21, III, Лемма 3.2]) существуют двухместная вычислимая функция \hat{h} и W -вычислимая функция m , удовлетворяющие условиям $h(x) = \lim_s \hat{h}(x, s)$ и $\hat{h}(x, t) = h(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$ и $t > m(x)$. Используя s-m-n теорему, определим вычислимую функцию d , положив

$$\varphi_{d(e)}(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x \in \emptyset' \text{ \& } \hat{h}(f(e, x), s) > 0, \\ & \text{где } s = \min\{t : x \in \emptyset'_t\}, \\ x_1, & \text{если } x \in \emptyset' \text{ \& } \hat{h}(f(e, x), s) = 0, \\ & \text{где } s = \min\{t : x \in \emptyset'_t\}, \\ \text{не определено,} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

по теореме рекурсии выберем номер n , для которого $\varphi_{d(n)} = \varphi_n$. Покажем, что для всех x выполняется

$$x \in \emptyset' \Leftrightarrow x \in \emptyset'_{m(f(n,x))}$$

Выберем произвольно $x \in \emptyset'$. Предположим, напротив, $x \notin \emptyset'_{m(f(n,x))}$. Выберем первое s , для которого $x \in \emptyset'_s$. Поскольку $s > m(f(n,x))$, имеем либо $F_0 \subseteq \alpha(f(n,x))$ and $\varphi_n(x) = x_1$, либо

$$\exists i \leq n [0 < i \ \& \ F_i \subseteq \alpha(f(n,x))]$$

и $\varphi_n(x) = x_0$. Следовательно,

$$\alpha(f(n,x)) \neq \alpha(\varphi_n(x)) = \alpha(f(n,x)).$$

Отсюда, $z \in \emptyset'_{m(f(n,x))}$. Таким образом, выполняется сводимость $\emptyset' \leq_T W$, которая противоречит выбору W . Следовательно, нумерация α не предполна. В силу произвольности выбора α теорема доказана. \square

Отметим, что семейство, состоящее из двух несравнимых по включению в.п. множеств не имеет вычислимых нумераций, удовлетворяющих теореме рекурсии. Таким образом, следующая теорема дает описание в.п. оракулов W , для которых любое W -вычислимое семейство обладает слабо предполной W -вычислимой нумерацией.

Теорема 9. Пусть $\emptyset <_T B \leq_T A$ и B вычислимо перечислимо. Тогда любое A -вычислимое семейство обладает слабо предполной A -вычислимой нумерацией.

Доказательство. Пусть β — A -вычислимая нумерация семейства \mathcal{S} . Определим по индукции его слабо предполную A -вычислимую нумерацию α . Одновременно с нумерацией α будем определять частично вычислимую функцию ψ , свидетельствующую о слабой предполноте α , и последовательность функций $\{\gamma_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ такую, что для всех s, z выполняется $\gamma_{s+1}(z) \leq \gamma_s(z)$, и $\alpha_s(z) = \alpha(z)$, если $B_s \upharpoonright \gamma_s(z) = B \upharpoonright \gamma_s(z)$. Отсюда, α будет A -вычислимой. Через η_s будем обозначать отношение эквивалентности

$$\eta_s = \{\langle x, y \rangle : \gamma_s(x) = \gamma_s(y)\}.$$

Для каждого s выполним

$$\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}.$$

Определим для всех x

$$\alpha_0(2x) = \beta(0), \alpha_0(2x+1) = \beta(x),$$

$$\gamma_0(2x) = x, \gamma_0(2x+1) = 0.$$

Пусть $\psi_0(e) \uparrow$ для всех e . Для всех s и y будем считать, что $\alpha_{s+1}(y) = \alpha_s(y)$, $\gamma_{s+1}(y) = \gamma_s(y)$, $\psi_{s+1}(y) = \psi_s(y)$, если явно не указано обратное.

Предположим по индукции, что нумерация α_s и функции γ_s, ψ_s определены, и $\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}$. Если существует $e \leq s$ такое, что $\psi_s(e) \uparrow$ и для некоторого $x \leq s$ выполняется

$$\varphi_{e,s}(2c(e, x)) \downarrow,$$

$$B_s \upharpoonright M \neq B_{s+1} \upharpoonright M,$$

где $M = \max\{\gamma_s(2c(e, x)), \gamma_s(\varphi_{e,s}(2c(e, x)))\}$, то выберем наименьшее такое e и зафиксируем z , для которого

$$\gamma_s(z) = \min\{\gamma_s(2c(e, x)), \gamma_s(\varphi_{e,s}(2c(e, x)))\}.$$

Определим

$$\psi_{s+1}(e) = 2c(e, x), \quad \alpha_{s+1}(y) = \alpha_s(z), \quad \gamma_{s+1}(y) = \gamma_s(z)$$

для всех y , удовлетворяющих условию $\gamma_s(y) = M$. В силу индукционного предположения $\eta_s \subseteq \eta_{\alpha_s}$, определение α_{s+1} корректно. Нетрудно видеть, что при таком определении индукционное предположение сохраняется.

Поскольку $\alpha_0(2x) = \beta(x)$ и $\gamma_0(2x) = 0$ для всех x , получаем, что α нумерует все семейство \mathcal{S} . Покажем, что нумерация α является слабо предполной. Предположим, что функция φ_e всюду определена, но значение $\psi(e)$ не определено. Отсюда, для любого s и любого достаточно большого x , если $\varphi_{e,s}(2c(e, x)) \downarrow$, то

$$B \upharpoonright \gamma_s(2c(e, x)) = B_{s+1} \upharpoonright \gamma_s(2c(e, x)).$$

Стало быть, что B вычислимо. Таким образом, пришли к противоречию. Значит $\psi(e) = 2c(e, x)$ для некоторого x . Непосредственно из построения вытекает, что $\langle \psi(e), \varphi_e(\psi(e)) \rangle \in \eta$ и, следовательно, $\alpha(\psi(e)) = \alpha(\varphi_e(\psi(e)))$. \square

Следствие 10. Для любого в.н. множества W , удовлетворяющего условию $\emptyset <_T W <_T \emptyset'$, существует семейство, обладающее слабо предполными, но не обладающее предполными W -вычислимыми нумерациями.

Список литературы

- [1] С. С. Гончаров, А. Сорби, *Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса*, Алгебра и логика, **36**, 6 (1997), 621–641.

URL: <http://mi.mathnet.ru/al2412>

- [2] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *The theory of numberings: Open problems*, Contemporary Mathematics, **257** (2000), 23–38.

URL: <http://www.ams.org/books/conm/257/>

-
- [3] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, *О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств*, Алгебра и логика, **40**, 5 (2001), 507–522.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al233>
- [4] С. Ю. Подзоров, *Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций*, Алгебра и логика, **42**, 2 (2003), 211–226.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al233>
- [5] С. Ю. Подзоров, *О локальном строении полурешёток Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций*, Алгебра и логика, **44**, 2 (2005), 148–172.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al99>
- [6] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S.B.Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, NY, Springer-Verlag, (2008), 19–34.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2
- [7] М. Х. Файзрахманов, *О теореме Хуторецкого для обобщённо вычислимых семейств*, Алгебра и логика, **58**, 4 (2019), 528–541.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al914>
- [8] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, *Обобщенно вычислимые универсальные нумерации*, Алгебра и логика, **53**, 5 (2014), 555–569.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al650>
- [9] С. А. Бадаев, А. А. Исахов, *Некоторые абсолютные свойства A -вычислимых нумераций*, Алгебра и логика, **57**, 4 (2018), 426–447.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al857>
- [10] М. Х. Файзрахманов, *О полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых нумераций*, Сиб. матем. журн., **58**, 6 (2017), 1418–1427.
URL: <http://mi.mathnet.ru/smj2948>
- [11] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Completeness and universality of arithmetical numberings*, in: Computability and Models. The University Series in Mathematics. Springer, Boston, MA, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0755-0_2
- [12] С. Ю. Подзоров, *О предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса*, Матем. тр., **7**, 2 (2004), 98–108.
URL: <http://mi.mathnet.ru/mt78>

-
- [13] Ю. Л. Ершов, *О неотделимых парах*, Алгебра и логика, **9**, 6 (1970), 661–666.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al1272>
- [14] В. Л. Селиванов, *Предполные нумерации и функции без неподвижных точек*, Матем. заметки, **51**, 1 (1992), 149–155.
URL: <http://mi.mathnet.ru/mz4463>
- [15] В. Л. Селиванов, *Предполные нумерации*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **157** (2018), 106–134.
URL: <http://mi.mathnet.ru/into409>
- [16] H. Barendregt, S. A. Terwijn, *Fixed point theorems for precomplete numberings*, Ann. Pure App. Logic, **170**, 10 (2019), 1151–1161.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.04.013>
- [17] T. H. Payne, *Effective extendability and fixed points*, Notre Dame J. Form. Log., **14**, 1 (1973), 123–124.
DOI: <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093890819>
- [18] С. А. Бадаев, *О слабо предполных позитивных эквивалентностях*, Сиб. матем. журн., **32**, 2 (1991), 166–169.
URL: <http://mi.mathnet.ru/smj4620>
- [19] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, М.: Наука, 1977.
- [20] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R.Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(99\)80030-5](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5)
- [21] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [22] M. Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q., **68**, 4 (2022), 398–408.
DOI: <https://doi.org/10.1002/malq.202200035>
- [23] М. Х. Файзрахманов, *Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность*, Алгебра и логика, **56**, 4 (2017), 506–521.
URL: <http://mi.mathnet.ru/al811>

М.Х. Файзрахманов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35,
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

UDC 510.54+510.57

MSC 03D45+03D25

Generalized computable numberings and fixed points

M. Kh. Faizrahmanov²

Abstract. The paper proves that for any c.e. set W , its non-computability is equivalent to the fulfillment of the Recursion theorem (with parameters) in each universal W -computable numbering, as well as its weak precompleteness and non-splittability. It is established that the Turing completeness of the c.e. oracle W is equivalent to the existence of a precomplete W -computable numbering for any W -computable family.

Keywords: numberings, universal numbering, precomplete numbering, Recursion theorem.

References

- [1] S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial rogers semilattices*, Algebra and Logic, **36**, 6 (1997), 359–369.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02671553>
- [2] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *The theory of numberings: Open problems*, Contemporary Mathematics, **257** (2000), 23–38.
URL: <http://www.ams.org/books/conm/257/>
- [3] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Rogers Semilattices of Families of Arithmetic Sets*, Algebra and Logic, **40**, 5 (2001), 283–291.
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012516217265>
- [4] S. Y. Podzorov, *Initial Segments in Rogers Semilattices of Σ_n^0 -Computable Numberings*, Algebra and Logic, **42**, 2 (2003), 121–129.
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023354407888>
- [5] S. Y. Podzorov, *Local structure of Rogers semilattices of Σ_n^0 -computable numberings*, Algebra and Logic, **44**, 2 (2005), 82–94.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-005-0010-3>

²The work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-20024) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2022-882).

- [6] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Computability and numberings*, in: S.B.Cooper (ed.) et al., New computational paradigms. Changing conceptions of what is computable, New York, NY, Springer-Verlag, (2008), 19–34.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68546-5_2
- [7] M. K. Faizrahmanov, *Khutoretskii's Theorem for Generalized Computable Families*, Algebra and Logic, **58**, 4 (2019), 356–365.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-019-09557-9>
- [8] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, *Generalized Computable Universal Numberings*, Algebra and Logic, **53**, 5 (2014), 355–364.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-014-9296-3>
- [9] S. A. Badaev, I. I. Issakhov, *Some Absolute Properties of A-Computable Numberings*, Algebra and Logic, **57**, 4 (2018), 275–288.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-018-9499-0>
- [10] M. K. Faizrahmanov, *The Rogers Semilattices of Generalized Computable Enumerations*, Sib. Math. J., **58**, 6 (2017), 1104–1110.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446617060192>
- [11] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, A. Sorbi, *Completeness and universality of arithmetical numberings*, in: Computability and Models. The University Series in Mathematics. Springer, Boston, MA, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0755-0_2
- [12] S. Yu. Podzorov, *On the limit property of the greatest element in the Rogers semilattice*, Siberian Adv. Math., **15**, 2 (2005), 104–114.
URL: <https://zbmath.org/?q=an:1095.03027>
- [13] Y. L. Ershov, *On inseparable pairs*, Algebra and Logic, **9**, 6 (1970), 396–399.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02219043>
- [14] V. L. Selivanov, *Precomplete numberings and functions without fixed points*, Math. Notes, **51**, 1 (1992), 95–99.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01229443>
- [15] V. L. Selivanov, *Precomplete Numberings*, J. Math. Sci., **256** (2021), 96–124.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05422-2>

-
- [16] H. Barendregt, S. A. Terwijn, *Fixed point theorems for precomplete numberings*, Ann. Pure App. Logic, **170**, 10 (2019), 1151–1161.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apal.2019.04.013>
- [17] T. H. Payne, *Effective extandability and fixed points*, Notre Dame J. Form. Log., **14**, 1 (1973), 123–124.
DOI: <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093890819>
- [18] S. A. Badaev, *On weakly pre-complete positive equivalences*, Sib. Math. J., **32**, 2 (1991), 321–323.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00972779>
- [19] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, Moscow (1977) Russian.
- [20] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings*, in: E.R.Griffor (ed.), Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140), Amsterdam, Elsevier, 1999, 473–503.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(99\)80030-5](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(99)80030-5)
- [21] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1987.
URL: <https://link.springer.com/book/9783540666813>
- [22] M. Kh. Faizrahmanov, *Extremal numberings and fixed point theorems*, Math. Log. Q., **68**, 4 (2022), 398–408.
DOI: <https://doi.org/10.1002/malq.202200035>
- [23] M. K. Faizrakhmanov, *Universal Generalized Computable Numberings and Hyperimmunity*, Algebra and Logic, **56**, 4 (2017), 337–347.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9454-5>

M.Kh. Faizrahmanov

Kazan Federal University,

Volga Region Mathematical Center,

18 Kremlyovskaya street, Kazan 420008, Russian Federation,

E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com